

Ing. Jaroslav S t a n e k CSc., VÚHU,

Ing. Jaroslav Z e l e n k a , VÚHU:

Rovnice hladiny nesoudržných hmot při rotačním pohybu
za ustáleného stavu

Ú v o d

V poslední době se objevují u některých typů dobývacích strojů rotační prvky pro přenos narýpané zeminy v horizontální rovině. U kolesového rypadla KU 800 byl použit vynášecí talíř z beskomorového kola, u kolesového rypadla K 10 000 je navržen kruhový dopravník ve střední stavbě rypadla, který dopravuje zeminu z kolesového výložníku na nakládací výložník. Obdobný typ byl již použit a v provozu s dobrým výsledkem vyzkoušen u korečkového rypadla RK 400.

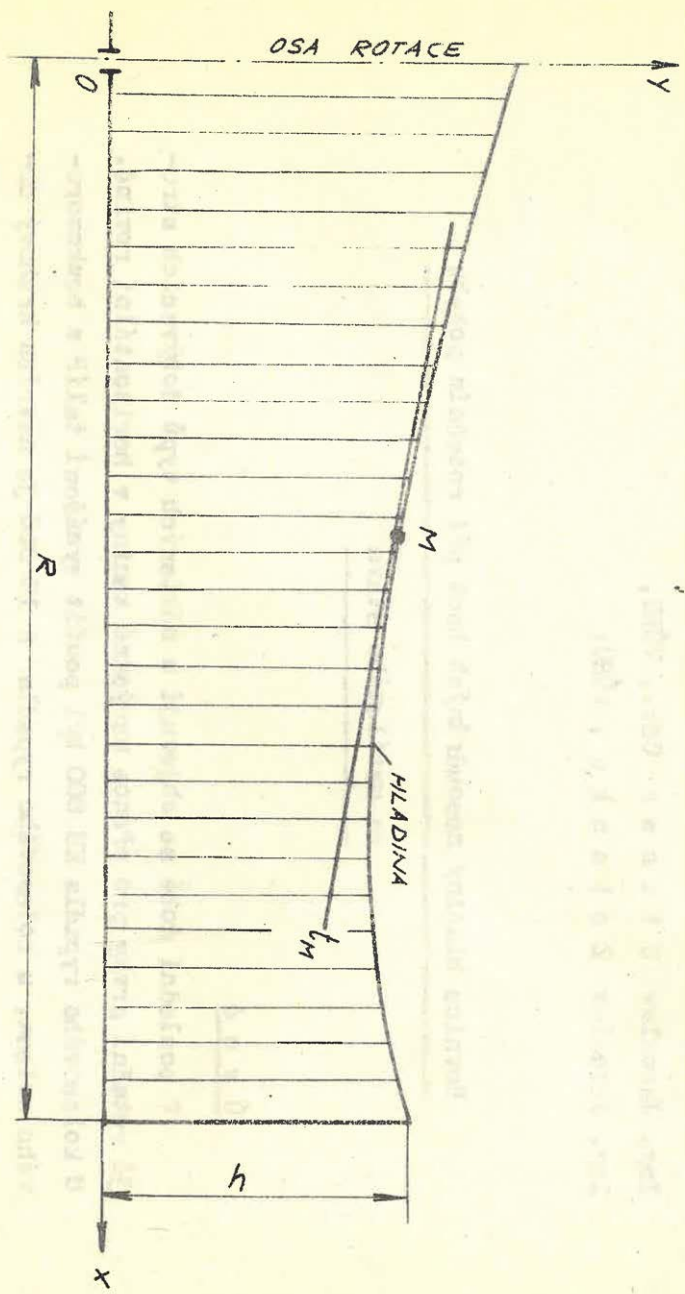
V následující části příspěvku budou odvozeny teoretické vztahy pro rovnici hladiny unášené nesoudržné hmoty na rotujícím prvku při ustáleném pohybu. Odvozených vztahů je možno použít při teoretickém výpočtu těchto konstrukčních prvků.

Odvození rovnice hladiny

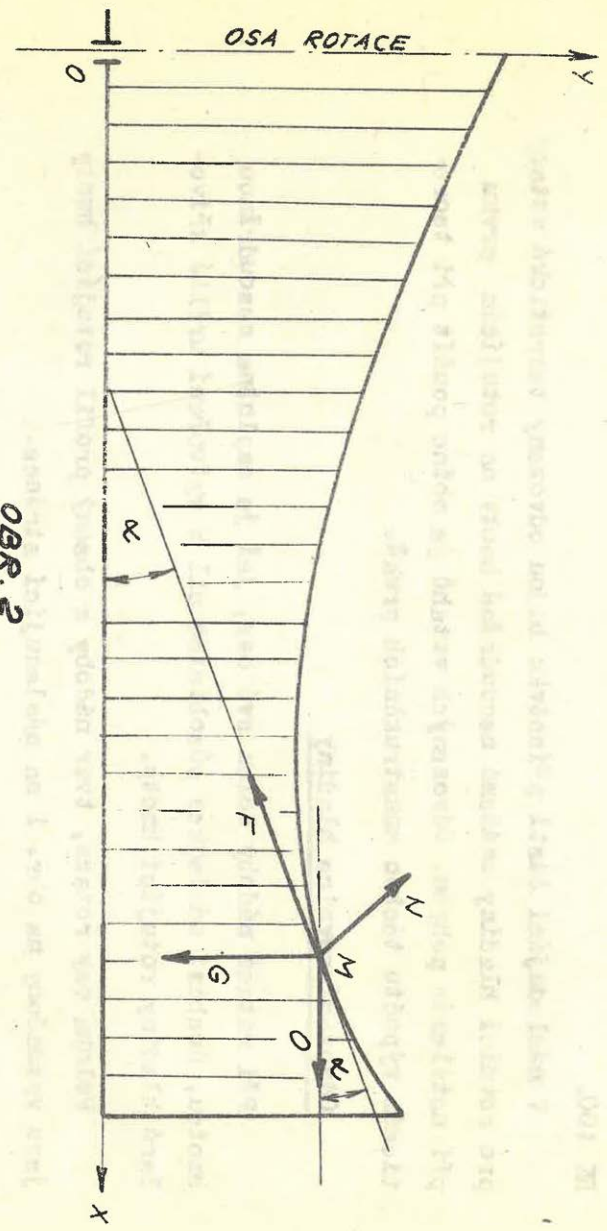
Při rotaci nádoby kolem své osy, jež je naplněna nesoudržnou hmotou, dochází následkem působících sil k vytvoření určité křivočaré hladiny rotující hmoty.

Poloha osy rotace, tvar nádoby a obecný profil rotující hmoty jsou vyznačeny na obr. 1 na následující stránce.

Rovnici hladiny nesoudržné hmoty odvodíme ze statické rovnováhy částice M, která leží na hladině. Silové účinky jsou vyznačeny na obr. 2.



OBR. 1



OBR. 2

Podle obr. 2, kde je vyznačena silová rovnováha hmotné částice M při ustáleném pohybu, platí:

$$0 - N \sin \alpha - F \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

$$N \cos \alpha - F \sin \alpha - G = 0 \quad (2)$$

K těmto základním rovnicím přistupuje další podmínka, vyplývající z Coulombova zákona

$$F = N \operatorname{tg} \varphi \quad (3)$$

Na obr. 2 a v uvedených rovnicích je

- $0 = m \cdot x \cdot \omega^2$ - odstředivá síla působící na částici M
- $G = m \cdot g$ - tíha částice M
- N - normálová reakce zeminy na částici M
- $F = N \cdot \operatorname{tg} \varphi$ - třecí reakce zeminy na částici M
- m - hmotnost částice M
- ω - úhlová rychlost rotující nádoby
- g - zemské zrychlení
- $\operatorname{tg} \varphi$ - koeficient tření zeminy po zemině.

Z uvedených vztahů (2) a (3) lze odvodit

$$N = \frac{G}{\cos \alpha - \operatorname{tg} \varphi \sin \alpha}$$

Dosazením za N do vztahu (1) získáme

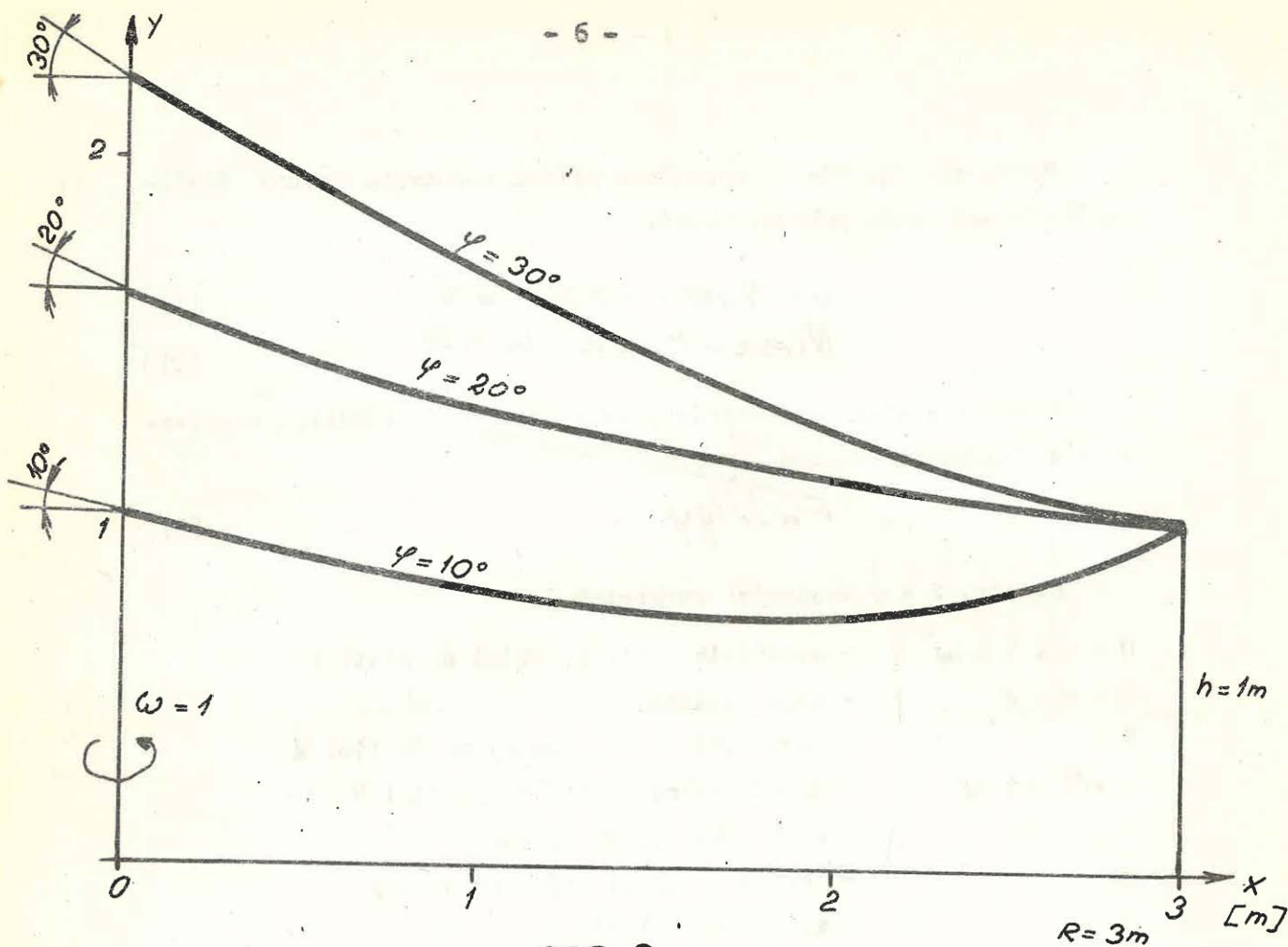
$$0 = \frac{G}{\cos \alpha - \operatorname{tg} \varphi \sin \alpha} \cdot (\sin \alpha + \operatorname{tg} \varphi \cos \alpha)$$

Po úpravě bude:

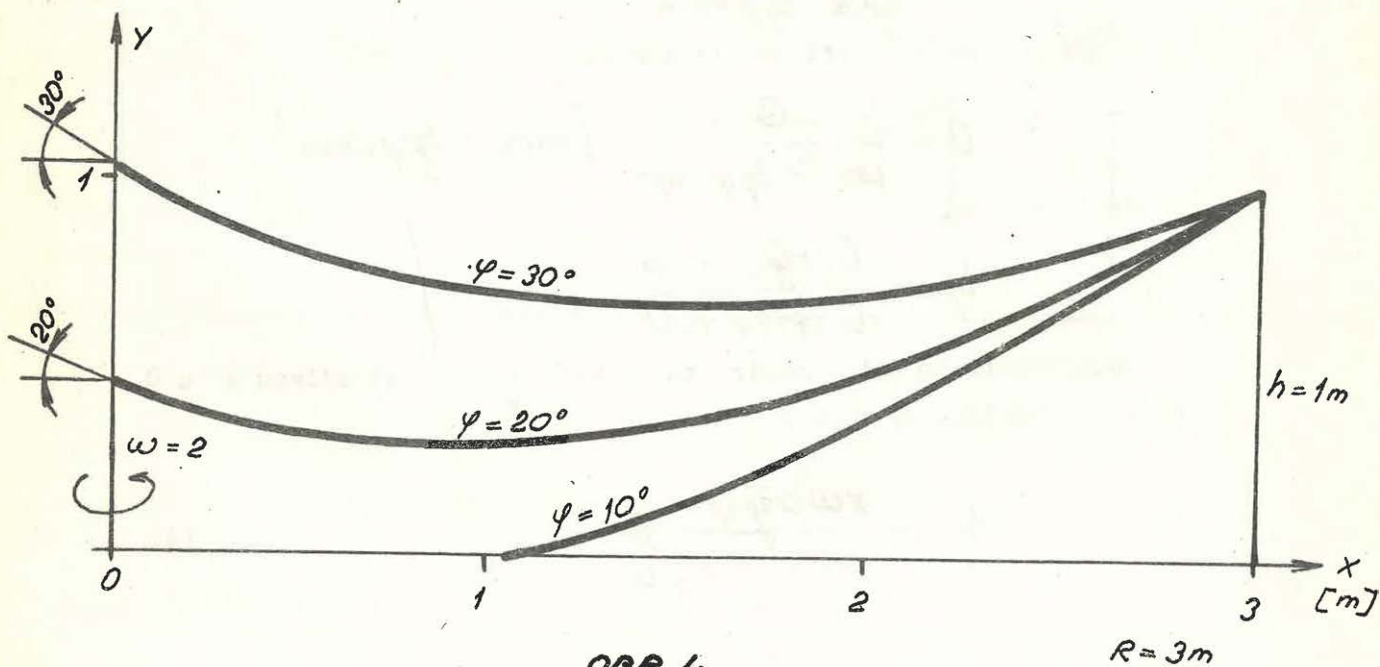
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0 \operatorname{ctg} \varphi - G}{G \operatorname{ctg} \varphi + 0}$$

Dosadíme-li do této rovnice známé vztahy pro odstředivou sílu 0 a tíhu G, obdržíme po úpravě

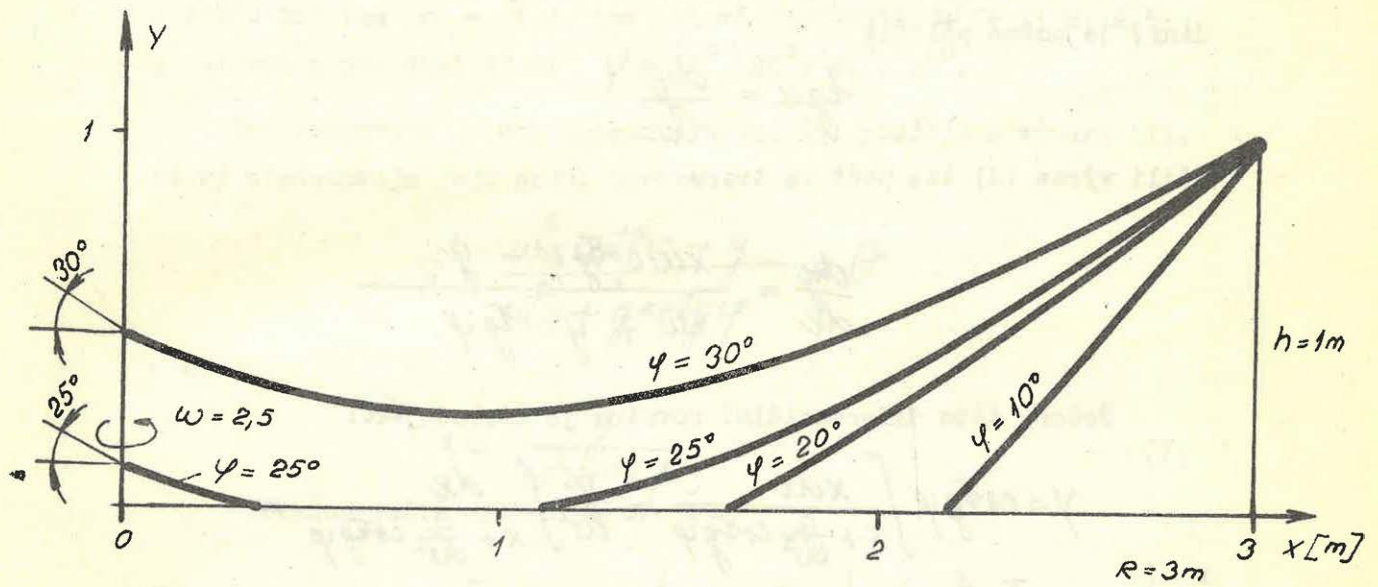
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x \omega^2 \operatorname{ctg} \varphi - g}{x \omega^2 + g \operatorname{ctg} \varphi} \quad (4)$$



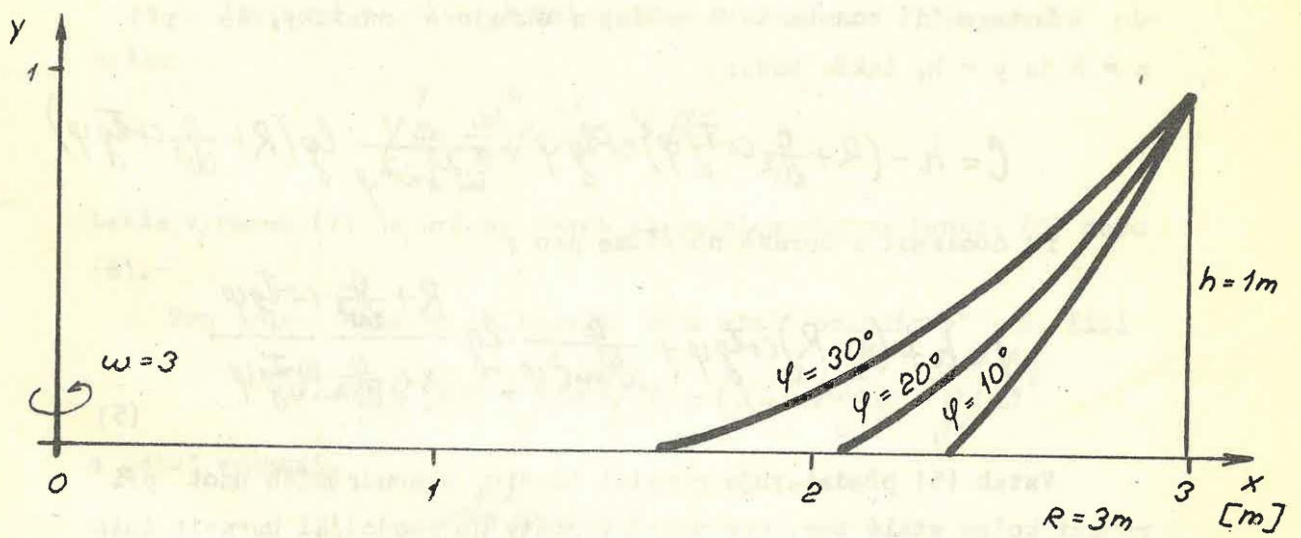
OBR. 3



OBR. 4



OBR. 5



OBR. 6

Jelikož úhlem α je určen sklon tečny v libovolném bodě hladiny, je možno položit

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$$

čili výraz (4) lze psát ve tvaru

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\omega^2 \operatorname{ctg} \varphi - g}{x\omega^2 + g \operatorname{ctg} \varphi}$$

Řešení této diferenciální rovnice je následující:

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{ctg} \varphi \int \frac{x dx}{x + \frac{g}{\omega^2} \operatorname{ctg} \varphi} - \frac{g}{\omega^2} \int \frac{dx}{x + \frac{g}{\omega^2} \operatorname{ctg} \varphi} = \\ &= \left(x + \frac{g}{\omega^2} \operatorname{ctg} \varphi\right) \operatorname{ctg} \varphi - \frac{g}{\omega^2 \sin^2 \varphi} \lg \left(x + \frac{g}{\omega^2} \operatorname{ctg} \varphi\right) + C \end{aligned}$$

Integrační konstantu C určíme z okrajové podmínky, že při $x = R$ je $y = h$, takže bude:

$$C = h - \left(R + \frac{g}{\omega^2} \operatorname{ctg} \varphi\right) \operatorname{ctg} \varphi + \frac{g}{\omega^2 \sin^2 \varphi} \lg \left(R + \frac{g}{\omega^2} \operatorname{ctg} \varphi\right)$$

Po dosazení a úpravě obdržíme pro y

$$y = h + (x - R) \operatorname{ctg} \varphi + \frac{g}{\omega^2 \sin^2 \varphi} \lg \frac{R + \frac{g}{\omega^2} \operatorname{ctg} \varphi}{x + \frac{g}{\omega^2} \operatorname{ctg} \varphi} \quad (5)$$

Vztah (5) představuje rovnici hladiny nesoudrůžných hmot při rotaci kolem stálé osy. Pro další výpočty je vhodnější upravit tuto rovnici na tvar

$$y = h + (x - R) \operatorname{ctg} \varphi + \frac{g}{\omega^2 \sin^2 \varphi} \cdot 2,303 \log \frac{R + \frac{g}{\omega^2} \operatorname{ctg} \varphi}{x + \frac{g}{\omega^2} \operatorname{ctg} \varphi} \quad (6)$$

Na přiložených obrázcích 3, 4, 5 a 6 jsou podle rovnice (6) vy-

počteny a nakresleny hladiny pro zvolený poloměr nádoby $R = 3 \text{ m}$ a výšku bočnice $h = 1 \text{ m}$, pro úhlové rychlosti $\omega = 1; 2; 2,5; 3 \text{ rad/sec}$ a pro úhel tření $\varphi = 10^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ$.

Pro stanovení polohy extrému funkce (5) použijeme výrazu (4), který představuje její první derivaci

$$y' = \frac{\omega^2 x \cotg \varphi - g}{\omega^2 x + g \cotg \varphi} = 0$$

a odtud

$$x = \frac{g}{\omega^2 \cotg \varphi} \quad (7)$$

Provedme ještě druhou derivaci

$$y'' = \frac{\omega^2 \cotg \varphi (x\omega^2 + g \cotg \varphi) - (x\omega^2 \cotg \varphi - g)\omega^2}{(x\omega^2 + g \cotg \varphi)^2}$$

Po dosazení x-ové souřadnice extrému z výrazu (7) a úpravě obdržíme

$$y'' = \frac{\omega^2}{g} \csc^2 \varphi > 0$$

takže výrazem (7) je určena x-ová souřadnice minima funkce (5) nebo (6).

Pro určení možného inflexního bodu stačí položit $y'' = 0$, čili

$$\omega^2 \cotg \varphi (x\omega^2 + g \cotg \varphi) = (x\omega^2 \cotg \varphi - g)\omega^2$$

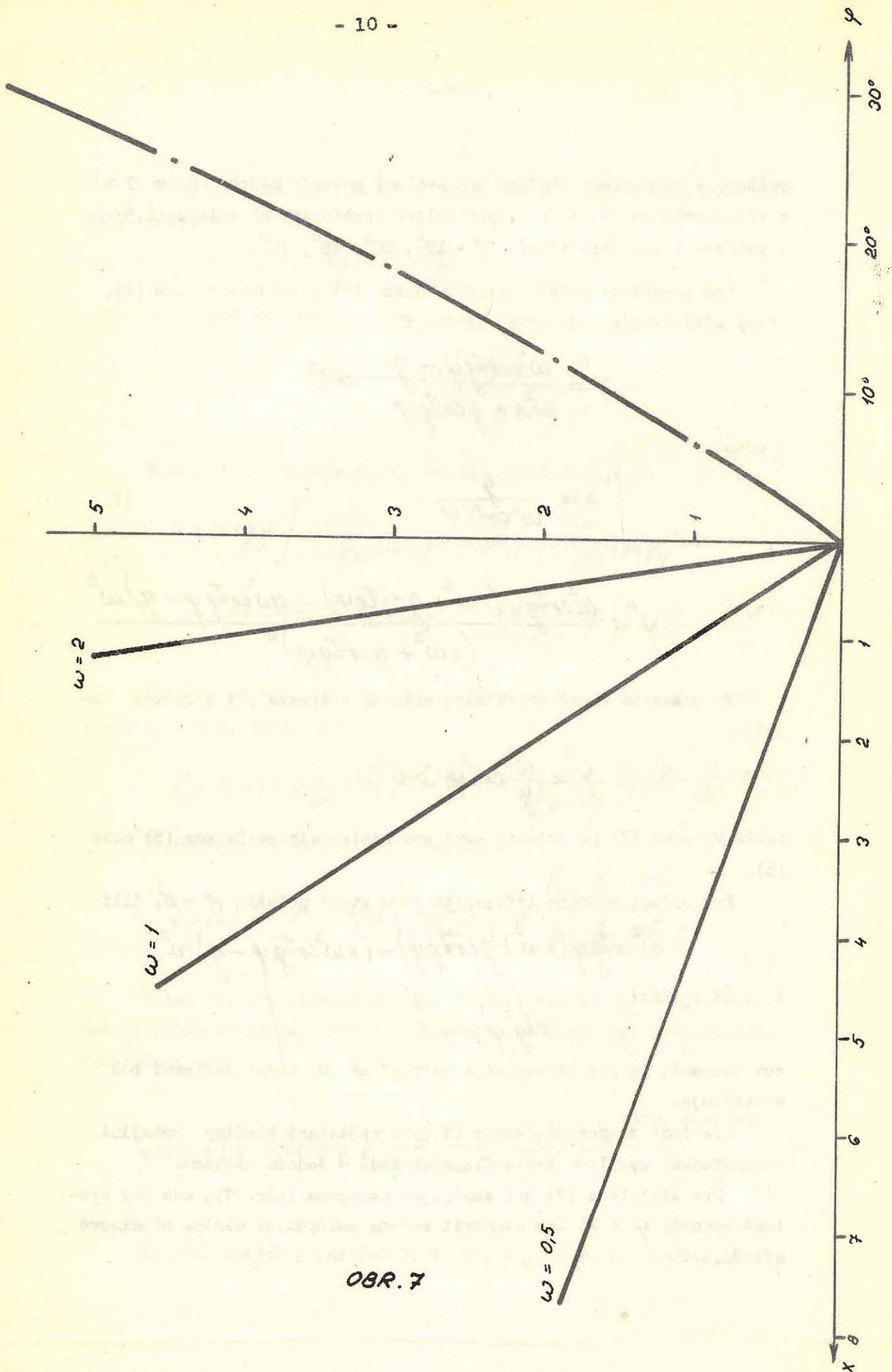
a odtud vychází

$$\cotg^2 \varphi = -1$$

což znamená, že pro libovolná x vždy $y'' \neq 0$, tudíž inflexní bod neexistuje.

Je tedy stanovená funkce (5) pro vyjádření hladiny rotující hmoty funkcí spojitou bez inflexních bodů s jedním minimem.

Pro závislost (7) byl sestaven nomogram (obr. 7), kde pro zvolené hodnoty φ a ω lze stanovit x-ovou souřadnici minima hladinové křivky.



OBR. 7

Budeme-li např. požadovat, aby pro rotující nádobu měla hladina nesoudržné hmoty stále tvar klesající funkce, musí minimum této funkce ležet vně rotující nádoby. Snížením hodnoty φ nebo zvýšením hodnoty ω posouvá se minimum funkce blíže k ose rotace a tvar hladiny ztrácí charakter klesající funkce.

Nakonec je nutno uvést, že tečna k hladině v bodě na ose rotace (pro $x = 0$) má sklon

$$\alpha = \varphi$$

jak vyplývá ze vztahu (4), položíme-li v něm $x = 0$.

Určení množství hmoty procházející radiálním profilem

Z rovnice hladiny nesoudržných hmot při rotačním pohybu za ustáleného stavu lze rovněž určit množství hmot prošlé za časovou jednotku profilem procházejícím osou rotace. (Viz obr. 8 na následující stránce).

Podle obr. 8, v němž plochy F_1 a F_2 obou profilů jsou totožné, lze použitím věty o střední hodnotě a rovnice kontinuity psát pro množství prošlé voleným profilem

$$Rh v_{T_1} = v_{T_2} \int_0^R y dx \quad (8)$$

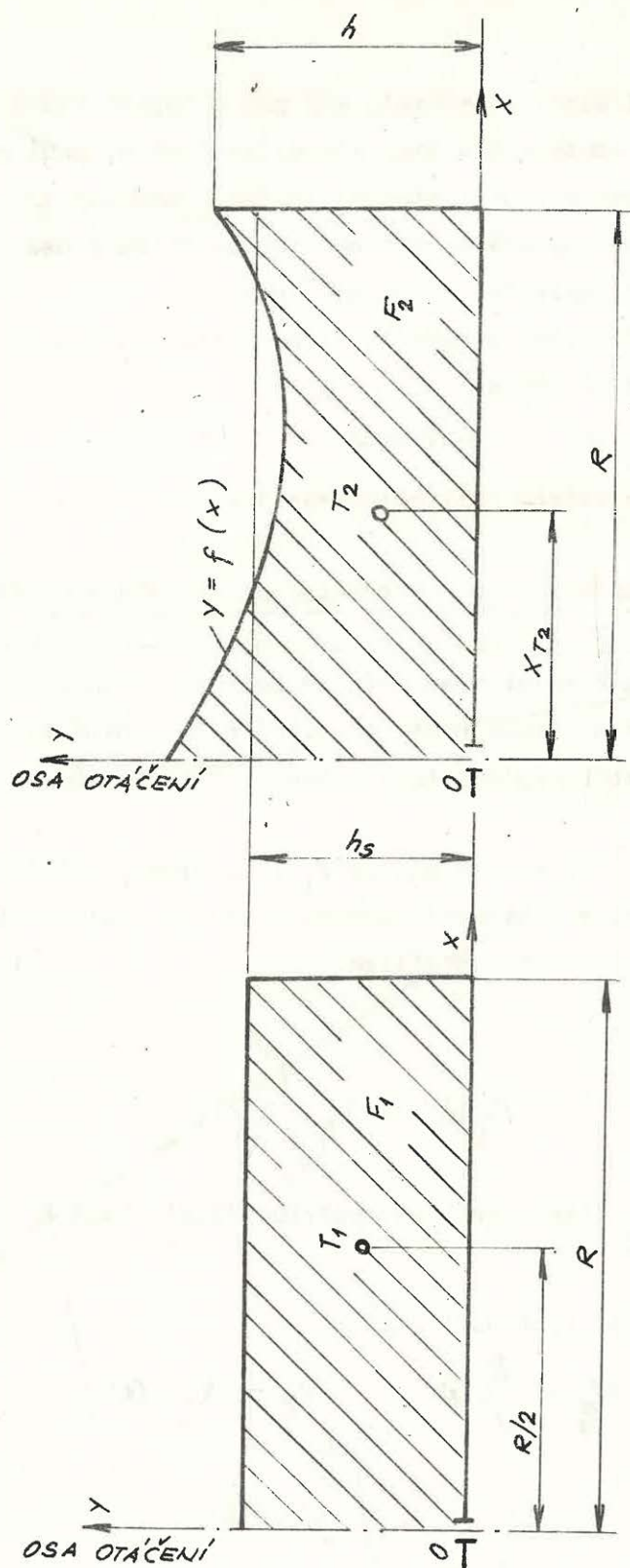
kde v_{T_1} a v_{T_2} jsou rychlosti pohybu těžišť ploch F_1 a F_2 .

Pro uvedené rychlosti platí

$$v_{T_1} = \frac{R}{2} \omega ; \quad v_{T_2} = x_{T_2} \cdot \omega$$

při čemž

$$x_{T_2} = \frac{\int_0^R y x dx}{\int_0^R y dx}$$



OBR. 8

Podle uvedených závislostí můžeme rovnici (8) psát ve tvaru

$$\frac{R^2}{2} h_s = \int_0^R y x dx$$

odkud

$$h_s = \frac{2}{R^2} \int_0^R y x dx$$

a po dosazení za y podle vztahu (5) je

$$h_s = \frac{2}{R^2} \int_0^R \left[h + (x-R) \cot \varphi + \frac{g}{\omega^2 \sin^2 \varphi} \lg \frac{R + \frac{g}{\omega^2} \cot \varphi}{x + \frac{g}{\omega^2} \cot \varphi} \right] x dx$$

Řešením integrálu a dosazením mezi obdržíme

$$h_s = h - \frac{1}{3} R \cot \varphi + \frac{g}{R \omega^2 \sin^2 \varphi} \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R g \cot \varphi}{\omega^2} + \right. \\ \left. + \frac{g^2}{\omega^4} \cot^2 \varphi \cdot \lg \left(\frac{R \omega^2 \cot \varphi}{g} + 1 \right) \right] \quad (9)$$

Určením h_s při daném h , R , ω , φ je dopravované množství určeno vztahem

$$Q = \frac{R^2}{2} h_s \omega \quad (10)$$

V případě rotující nádoby se dnem ve tvaru mezikruží, jak je naznačeno na obr. 9, bude určení dopravovaného množství obdobné. Místo vztahu (8) bylo by nutno použít vztahu

$$(R_2 - R_1) h_s \cdot v_{\pi_1} = v_{\pi_2} \cdot \int_{R_1}^{R_2} y dx \quad (11)$$

kde

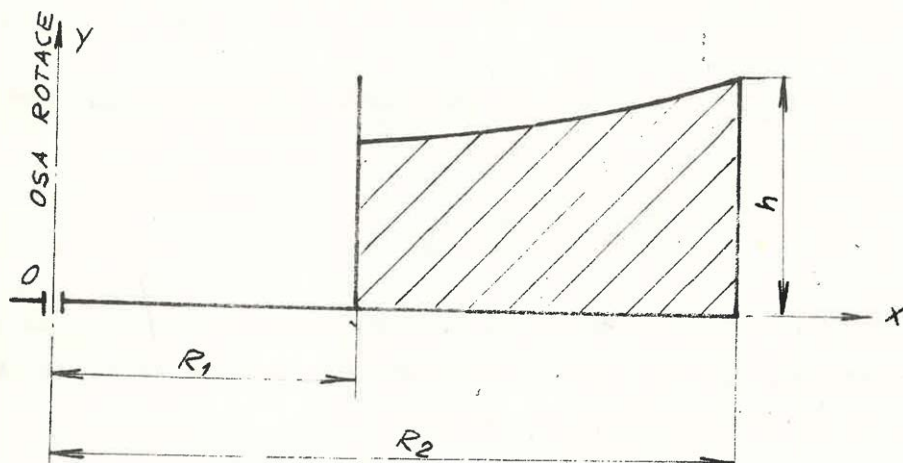
$$v_{T_1} = \frac{R_2 + R_1}{2} \cdot \omega ; \quad v_{T_2} = \omega \cdot \frac{\int_{R_1}^{R_2} yx dx}{\int_{R_1}^{R_2} y dx}$$

a po dosazení za v_{T_1} a v_{T_2} do vztahu (11) obdržíme

$$\frac{R_2^2 - R_1^2}{2} \cdot h_s = \int_{R_1}^{R_2} yx dx$$

odkud

$$h_s = \frac{2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \int_{R_1}^{R_2} yx dx$$



OBR. 9

Po dosazení za y podle vztahu (5) bude

$$h_s = \frac{2}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} \left[h + (x - R) \cot \varphi + \frac{g}{\omega^2 \sin^2 \varphi} \lg \frac{R + \frac{g}{\omega^2} \cot \varphi}{x + \frac{g}{\omega^2} \cot \varphi} \right] x dx$$

Řešením tohoto integrálu a dosazením mezi obdržíme:

$$\begin{aligned} h_s = & \frac{2}{3} \cdot \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2} \cot \varphi + h - R_2 \cot \varphi + \frac{g}{2\omega^2 \sin^2 \varphi} - \\ & - \frac{1}{R_2 + R_1} \cdot \frac{g^2 \cot \varphi}{\omega^4 \sin^2 \varphi} + \\ & + \frac{1}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \left(\frac{g^3 \cot^2 \varphi}{\omega^6 \sin^2 \varphi} - \frac{g R_1^2}{\omega^2 \sin^2 \varphi} \right) \cdot \lg \frac{R_2 + \frac{g}{\omega^2} \cot \varphi}{R_1 + \frac{g}{\omega^2} \cot \varphi} \end{aligned} \quad (12)$$

Určením h_s při daných hodnotách h , R_1 , R_2 , ω a φ je dopravné množství určeno vztahem

$$Q = \frac{(R_2^2 - R_1^2) \cdot h_s}{2} \quad (13)$$

Bude-li naopak v obou případech dáno množství, které má projít za časovou jednotku profilem vedeným osou rotace při daných hodnotách R , resp. R_1 a R_2 , ω a φ , je možno z uvedených vzorců určit potřebnou výšku bočnice h .

Pro tento případ určíme nejdříve h_s ze vzorce (10), resp. (13) a jeho dosazením do vzorců (9), resp. (12) lze určit potřebnou výšku bočnice h .

S h r n u t í

Příspěvek řeší možnosti přenosu nesoudržných hmot pomocí rotačních prvků používaných na dobývacích strojích a umožňuje způsob výpočtu výkonnosti těchto rotačních prvků.

Р е з ю м е

Математическое уравнение уровня несвязных материалов при вращательном движении в условиях установившегося режима работы

В статье обсуждаются возможности передачи несвязных грунтов при помощи вращательных элементов употребляемых на экскаваторах и дается способ определения эффективности этих элементов.

S u m m a r y

The equations of the surface of non cohesive materials at rotational motion in a stabilized state

The article deals with the transport possibilities of non cohesive materials by means of rotary elements used on the excavating machines and indicates a calculating method of the efficiency of these rotary elements.

Z u s a m m e n f a s s u n g

Gleichung für die Oberfläche von Lockermassen im stationären Zustand bei einer Drehbewegung

Im vorliegenden Beitrag werden die Möglichkeiten für den Transport von Lockermassen mittels rotierender, an Gewinnungsgeräten verwendeter Elemente besprochen und eine Berechnungsmethode für deren Leistungsfähigkeit angedeutet.

R é s u m é

Équation de la surface des matériaux non-cohérents pendant un mouvement de rotation dans l'état stabilisé

La contribution résout les possibilités du transport des matériaux non-cohérents à l'aide des éléments de rotation utilisés sur les abatteuses et on marque une méthode pour mesurer le rendement de ces éléments de rotation.